

# Didaktik der Mathematik

9. Jahrgang 1981

Wissenschaftlicher  
Beirat

Martin Barner  
Friedrich Barth  
Arthur Engel  
Friedrich Flohr  
Robert Ineichen  
Max Jeger  
Johannes Kratz  
Josef Laub  
Günter Pickert  
Karl Seebach  
Hans-Georg Steiner  
Ernst Wienholtz  
Horst Woschner  
Herbert Zeitler

Redaktion

Franz Hager

**Bayerischer Schulbuch-Verlag · München**



---

#### **Anschriften der Beiratsmitglieder:**

Prof. Dr. Martin Barner,  
Math. Inst. d. Univ., Hebelstr. 29, 7800 Freiburg  
StD Friedrich Barth, Abbachstr. 23, 8000 München 50  
Prof. Dr. Arthur Engel, Inst. f. Didaktik d. Mathematik,  
Senckenberganlage 9-11, 6000 Frankfurt 1  
Prof. Dr. Friedrich Flohr,  
Math. Inst. d. Univ., Hebelstr. 29, 7800 Freiburg  
Prof. Dr. Robert Ineichen,  
Kastanienbaumstr. 16, CH-6048 Horw  
Prof. Dr. Max Jeger, Mathematisches Seminar  
der ETH Zürich, Rämistr. 101, CH-8092 Zürich  
OStD Johannes Kratz, Ulmenstr. 16, 8035 Gauting

Hofrat Dr. Josef Laub, Krottenbachstr. 33/6, A-1190 Wien  
Prof. Dr. Günter Pickert, Math. Inst. d. Justus-Liebig-  
Universität, Arndtstr. 2, 6300 Gießen  
Prof. Dr. Karl Seebach, Walhallastr. 5, 8000 München 19  
Prof. Dr. Hans-Georg Steiner,  
Marsstr. 16, 4800 Bielefeld 15  
Prof. Dr. Ernst Wienholtz, Mitterweg 14a, 8033 Krailling  
StD Horst Woschner, Theresienstr. 60, 8000 München 2  
Prof. Dr. Herbert Zeitler, Universität Bayreuth  
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik  
Universitätsstraße 30, 8580 Bayreuth

---

#### **Anschrift der Redaktion:**

OSTR Franz Hager, Blütenstr. 9, 8039 Puchheim,  
Telefon (089) 80 30 43

**Bezugsbedingungen:** Jahresabonnement 4 Hefte DM 45,-  
Einzelheft DM 12,60, zuzüglich Versandkosten.  
In den Bezugspreisen sind 6,5 % MwSt. enthalten.  
Postscheckkonto München 933 70-805  
Bankkonto: Bayer. Vereinsbank München 81 154  
„Didaktik der Mathematik“ erscheint einmal vierteljährlich.  
Für unverlangt eingesandte Manuskripte wird keine  
Gewähr übernommen. Nachdrucke innerhalb der gesetzl.  
Frist nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Verlages.

#### **Verlag und Anzeigenverwaltung**

Bayerischer Schulbuch-Verlag, Postfach 87,  
Hubertusstraße 4, 8000 München 19, Tel. (089) 17 40 67-69  
Zur Zeit ist Anzeigenpreisliste Nr. 2 vom 1. 8. 1978 gültig.  
Satz: Fotosatz W. Tutte, Salzweg  
Druck: E. Rieder, Schrobenuhausen  
Didaktik der Mathematik wird laufend im  
PÄDAGOGISCHEN JAHRESBERICHT (Verlag für  
pädagogische Dokumentation, Duisburg) bibliografisch  
nachgewiesen.

Hinweise für Autoren siehe dritte Umschlagseite.

Die in der Zeitschrift veröffentlichten Beiträge sind  
urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, insbesondere  
das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.  
Kein Teil dieser Zeitschrift darf ohne schriftliche  
Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form –  
durch Fotokopie, Mikrofilm oder andere Verfahren –  
reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere  
von Datenverarbeitungsanlagen, verwendbare Sprache  
übertragen werden.

Auch die Rechte der Wiedergabe durch Vortrag,  
Funk- und Fernsehsendung, im Magnettonverfahren  
oder ähnlichem Wege bleiben vorbehalten.

Fotokopien für den persönlichen und sonstigen  
eigenen Gebrauch dürfen nur von einzelnen Beiträgen  
oder Teilen daraus als Einzelkopien hergestellt  
werden. Jede im Bereich eines gewerblichen  
Unternehmens hergestellte oder benutzte Kopie dient  
gewerblichen Zwecken gem. § 54 (2) UrhG und  
verpflichtet zur Gebührenzahlung an die VG WORT,  
Abteilung Wissenschaft, Goethestraße 49,  
8000 München 2, von der die einzelnen Zahlungs-  
modalitäten zu erfragen sind.

ISSN 0343-5334

## Inhaltsverzeichnis

Baptist, Peter  
Iterative Einschließung von Nullstellen  
(46–56)

Barth, Friedrich / Kreutzer, Karl-Heinz  
Lösung von Problem des Monats 1  
(80–82)

Barth, Friedrich / Kreutzer, Karl-Heinz  
Problem des Monats 2  
(158–159)

Barth, Friedrich / Kreutzer, Karl-Heinz  
Lösung von Problem des Monats 2  
(239–244)

Berg, Martin  
Vom Peaucellier-Inversor zur Normalform der  
Geradengleichung  
(201–212)

Brandt, Dieter  
Iterationsverfahren – eine Unterrichtseinheit im  
Leistungskurs  
(135–152)

Brüning, A. / Spallek, K.  
Einführung der Brüche ohne Operatoren  
(116–130)

Dufner, Julius  
Zur Integration von Umkehrfunktionen  
(131–134)

Dufner, Julius  
Die Stabilität des Gleichgewichtspreises – ein  
Beispiel für Anwendungen der Analysis in der  
Wirtschaftstheorie  
(162–179)

Karl Faber  
27. 10. 1902 – 12. 7. 1981  
(161)

Fricke, Arnold  
Quaderpackungen – ein Beispiel entdeckenden  
Lernens  
(1–12)

Fricke, Arnold  
Wahrscheinlichkeiten bei einem Spiel im Qua-  
dratgitter  
(217–238)

Fritsch, Rudolf  
Winkelverteilung am Tetraeder  
(276–290)

Hackenberg, Dieter  
Verwendung der Restklassen zur Begründung  
des Rechnens mit negativen Zahlen  
(195–200)

Internationale Konferenz über den Unterricht in  
Statistik in Sheffield/England vom 8. bis 13. Au-  
gust 1982  
(160)

Kratz, Johannes  
Über Berührkreisketten – ein Beispiel für ent-  
deckendes Lernen im Geometrieunterricht der  
Sekundarstufe I  
(83–91)

Lang, Konrad  
Eine Anregung zur Anwendung der Abbildungs-  
geometrie  
(13–19)

Lang, Konrad  
Über Berührkreisketten – eine Anmerkung zum  
gleichnamigen Beitrag von J. Kratz  
(213–216)

Lang, Konrad  
Zur Geometrie der Hyperbeln  
(291–306)

Leinfelder, Herbert  
Lokal natürlich-geordnete Subordnungen und  
deren Anwendung in der Analysis  
(32–45)

Leinfelder, Herbert  
Zum Fundamentalsatz der Algebra  
(187–194)

Maier, Hermann  
Ansätze zu einer Theorie des Schulbuchs für den  
Mathematikunterricht  
(307–326)

Neugart, Günter  
das d'Hondtsche Höchstzahlverfahren  
(180–186)

Ruch, Martin  
Pythagoreische Zahlentripel  
(153–157)

Schaal, Hermann  
Synthetische und analytische Methoden im  
Geometrieunterricht der Sekundarstufe II  
(92–103)

Schönwald, Hans G.  
Wählerwanderungsanalyse bei geheimen Wah-  
len  
(111–115)

Professor Dr. Karl Seebach emeritiert  
(245–249)

Steinberg, Günter  
Ein Plädoyer für die Brücke zwischen Problem  
und System im Mathematikunterricht  
(20–31)

Vaupel, Jürgen  
Bemerkungen zur Integralrechnung in Grund-  
und Leistungskursen  
(57–79)

Wode, Dieter  
Über die Wahrscheinlichkeit absoluter Mehrhei-  
ten  
(104–110)

Zeitler, Herbert  
Über Gleichdicks. Anregungen und Erfahrungen  
zum Geometrieunterricht in der Sekundarstufe I  
(250–275)

Rudolf Fritsch

## Winkelverteilung am Tetraeder

Professor Dr. Karl Seebach im Blick auf die Zusammenarbeit am Mathematischen Institut der Ludwig-Maximilian-Universität München gewidmet.

Zur Pflege des räumlichen Anschauungsvermögens wird untersucht, wie sich spitze, rechte und stumpfe Winkel zwischen den Seiten eines Tetraeders verteilen können. Am Ende ergibt sich die graphentheoretische Charakterisierung von M. Fiedler [1].

Eine wesentliche, zur Zeit aber etwas vernachlässigte Aufgabe des Mathematik-Unterrichts an den Schulen ist die Pflege des räumlichen Anschauungsvermögens. Dies sollte in allen Stufen geschehen und nicht auf ein Kapitel Stereometrie und Darstellende Geometrie am Ende der Mittelstufe beschränkt bleiben. Reiches Material dafür bietet die Frage nach räumlichen Analoga zu Sätzen der ebenen Dreieckslehre. Wir wollen das hier an einem einfachen Beispiel demonstrieren, das man in der Klasse 7 zum ersten Mal ansprechen und später immer wieder aufnehmen kann.

Ziemlich zu Beginn der Dreieckslehre kommt man zu

**Satz 0:** In jedem Dreieck sind zwei oder drei Winkel spitz; der dritte Winkel kann spitz, recht oder stumpf sein.

Dem Dreieck in der Ebene entspricht im dreidimensionalen Raum die dreiseitige Pyramide, das Tetraeder. Ein Tetraeder wird von 4 dreieckigen Seiten berandet und wir fragen, welche Arten von Winkeln diese Seiten miteinander bilden können. Diese Frage sollte zunächst in der Unterstufe im Zusammenhang mit dem eben genannten Satz der Dreieckslehre heuristisch behandelt werden; in der Mittelstufe kann man im Rahmen der Stereometrie und der Darstellenden Geometrie das so gesammelte Material systematisch ordnen und in der Kollegstufe hat man dann die Möglichkeit, spezielle Aufgaben mit den Methoden der Vektoralgebra konkret durchzurechnen. Wir stellen hier die Überlegungen dar, nach Unterstufe (etwa Klasse 7) und Mittelstufe (etwa Klasse 10) gegliedert, die zu der auf M. Fiedler [1] zurückgehenden graphentheoretischen Beschreibung der Winkelverteilung am Tetraeder führen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Sedmidubský von der Fachgruppe Literaturwissenschaft der Universität Konstanz, der mir die in tschechischer Sprache abgefaßte Arbeit vom M. Fiedler übersetzt und dadurch erst zugänglich gemacht hat.

### 1. Unterstufe

Bevor man die Innenwinkel eines Tetraeders untersuchen kann, sind natürlich einige wenige Vorbereitungen notwendig. Diese ergeben sich aber ziemlich selbstverständlich, wenn man beim Beginn des systematischen Geometrie-Unterrichts immer wieder ebene

und räumliche Verhältnisse betrachtet. Ganz am Anfang tut man das ja schon immer, d. h. mindestens seit Euklid:

Man klärt die Begriffe *Punkt*, *Gerade*, *Ebene* und *Raum* und stellt dabei fest, daß

*2 verschiedene Punkte immer genau eine Gerade und 3 Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, immer genau eine Ebene bestimmen.*

Nun sollte man aber auch bei der Behandlung des *Lotes* nicht nur Lote zu einer Geraden, sondern auch Lote zu einer Ebene betrachten. Es gilt ja genau der gleiche Sachverhalt:

a) *Zu einer Ebene  $\bar{e}$  und einem Punkt  $P$  gibt es genau eine Gerade  $\bar{l}$  durch  $P$ , die auf  $\bar{e}$  senkrecht steht.*

Interessant und für unser Vorhaben wichtig ist allerdings auch die duale Aussage, die durch die Vertauschung der Begriffe Ebene und Gerade entsteht.

b) *Zu einer Geraden  $\bar{l}$  und einem Punkt  $P$  gibt es genau eine Ebene  $\bar{e}$  durch  $P$ , die auf  $\bar{l}$  senkrecht steht.*

Der ebene Satz zerfällt also räumlich in zwei verschiedene, aber zueinander „duale“ Aussagen, was einen Grundlagengeometer zu reizvollen philosophischen Gedanken über das Verhältnis Ebene – Raum anregt, aber im Unterricht hier sicher nicht vertieft werden sollte.

Wenn wir dann vom *Dreieck* sprechen – es wird von drei Punkten gebildet, die nicht auf einer Geraden liegen – können wir auch gleich über das *Tetraeder* reden, aus dem die Schüler in der Pause ihre Limonade trinken. Es entsteht aus vier Punkten, die nicht in einer Ebene liegen. Sind  $A, B, C, D$  vier solche Punkte, die *Ecken* des Tetraeders, so liegen keine drei von ihnen in einer Geraden; das Tetraeder hat also vier dreieckige *Seiten*  $a = BCD$ ,  $b = ACD$ ,  $c = ABD$  und  $d = ABC$ . Die Strecken  $[AB]$ ,  $[AC]$ , ... heißen *Kanten* des Tetraeders, es sind 6 an der Zahl (Fig. 1). Die *Winkelmessung* führt man zunächst für zwei

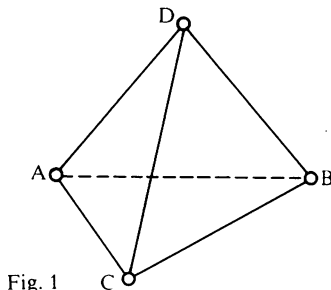


Fig. 1

Halbgeraden mit gleichem Anfangspunkt ein; es ist dann aber klar, wie man mit Hilfe der obigen Aussage b) Winkel zwischen zwei Halbebenen mit gleicher Randgeraden mißt: Man betrachtet den Winkel, den das von den beiden Halbebenen gebildete Winkelfeld aus

einer zur gemeinsamen Randgeraden senkrechten Ebene ausschneidet. Analog zu den Innenwinkeln eines Dreiecks definiert man nun die *Innenwinkel* eines Tetraeders; wir bezeichnen mit  $\varphi_{ab} = \varphi_{CD}$ ,  $\varphi_{ac} = \varphi_{BD}$ , ..., die von den Seiten a, b bzw. a, c, ... gebildeten Winkel und ihre Größe. (Die Bezeichnung  $\varphi_{CD}$  erklärt sich daraus, daß die gemeinsame Randgerade der zu betrachtenden Halbebenen durch die Punkte CD festgelegt ist; soweit wir im folgenden geometrische Verhältnisse an Figuren ablesen wollen, ist „ $\varphi_{CD}$ “ suggestiver als „ $\varphi_{ab}$ “).

Nun kommt man bald zum Winkelsummensatz für das Dreieck und leitet daraus den Satz 0 über die Verteilung von spitzen, rechten und stumpfen Winkeln ab. Eine Verallgemeinerung des Winkelsummensatzes selbst auf das Tetraeder ist in dieser Stufe sicher nicht möglich<sup>1</sup>, wohl aber kann man schon nach der Verteilung der Winkeltypen „spitz“, „recht“, „stumpf“ am Tetraeder fragen.

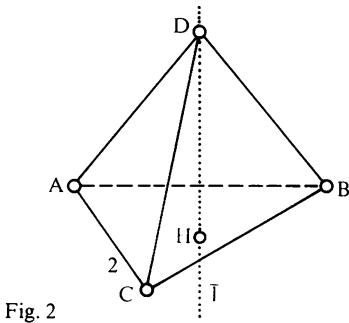


Fig. 2

Dazu ist es günstig, sich das Tetraeder als dreiseitige Pyramide vorzustellen, d. h. eine Seite, etwa d, als *Grundseite* auszuzeichnen, mit der es auf der *Grundebene* vor uns steht, und die 4. Ecke als *Spitze* D über der Grundebene anzusehen. Wesentliche Bedeutung für unsere Überlegungen haben dann noch das Lot  $\bar{I}$  durch D auf die Grundebene und der Durchstoßpunkt des Lotes durch die Grundebene, der *Höhenfußpunkt* H (Fig. 2). Eine entscheidende Technik für das folgende besteht darin, die Spitze D längs des Lotes  $\bar{I}$  zu verschieben; dabei bereitet man sogar recht anschaulich den Grenzwertbegriff vor. Ganz allgemein „sieht“ man: Bewegt sich D von H weg – wir wollen das symbolisch durch

$$D \rightarrow \infty$$

ausdrücken – dann gilt

<sup>1</sup> Man könnte allenfalls an Hand von Beispielen feststellen, daß die Summe

$$\varphi_{AB} + \varphi_{AC} + \varphi_{AD} + \varphi_{BC} + \varphi_{BD} + \varphi_{CD}$$

nicht für alle Tetraeder den gleichen Wert hat: Das von einem orthonormalen Dreibein gebildete Tetraeder hat ja eine Winkelsumme echt kleiner als  $435^\circ$ , verlängert man aber einen der Schenkel des Dreibeins beliebig weit, so strebt die Winkelsumme gegen  $450^\circ$ !

$$\varphi_{AB}, \varphi_{BC}, \varphi_{AC} \rightarrow 90^\circ$$

folglich

$$\varphi_{AC} \rightarrow \alpha, \varphi_{BD} \rightarrow \beta, \varphi_{CD} \rightarrow \gamma$$

wobei  $\alpha, \beta, \gamma$  in üblicher Weise die Winkel des Dreiecks  $d = ABC$  bezeichnen (Fig. 3)<sup>1</sup>.

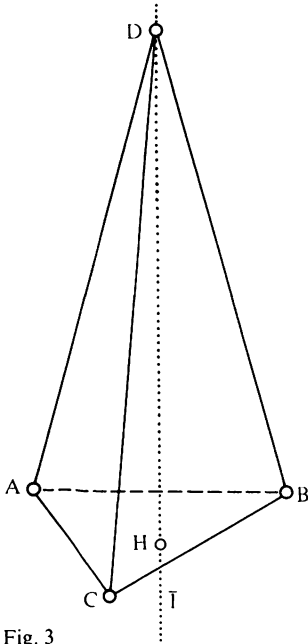


Fig. 3

Zunächst betrachten wir nun den „Normalfall“, den Limonaden-Tetrapak: Wir nehmen an, daß der Höhenfußpunkt H im Innern des Dreiecks  $d = ABC$  liegt, wie es in Figur 2 zeichnerisch dargestellt ist. Dann erkennen wir sofort drei spitze Winkel, nämlich  $\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\varphi_{AC}$ . Außerdem (Figur 3) gilt:

*Ist das Dreieck  $d = ABC$  spitzwinklig und D weit entfernt von H, so sind auch die Winkel  $\varphi_{AD}$ ,  $\varphi_{BD}$  und  $\varphi_{CD}$  spitz.*

1 Daraus ergibt sich, wie schon in der Fußnote Seite 278 erwähnt

$$\varphi_{AB} + \varphi_{AC} + \varphi_{AD} + \varphi_{BC} + \varphi_{BD} + \varphi_{CD} \rightarrow 450^\circ$$

für  $D \rightarrow \infty$ .



Wenn wir uns dagegen mit D auf H zu bewegen – symbolisch

$$D \rightarrow H -$$

dann finden wir

$$\varphi_{AD}, \varphi_{BD}, \varphi_{CD} \rightarrow 180^\circ,$$

also

*Ist D nahe bei H, so sind die Winkel  $\varphi_{AD}$ ,  $\varphi_{BD}$  und  $\varphi_{CD}$  stumpf (unabhängig von der Form des Dreiecks  $d = ABC$ ).*

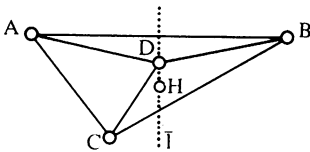


Fig. 4

Es ist klar, daß im allgemeinen Zwischenformen auftreten, in denen diese drei Winkel nicht gleichartig sind, einer oder mehrere dabei können auch rechte Winkel sein. Damit haben wir den

**Satz 1:** Liegt ein Höhenfußpunkt im Inneren der zugehörigen Seite, so bildet diese Seite mit allen anderen Seiten spitze Winkel; die übrigen Winkel können spitz, recht oder stumpf sein.

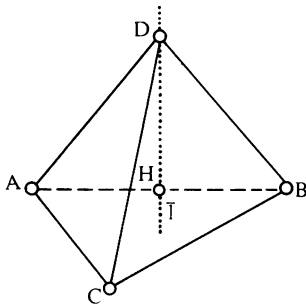


Fig. 5

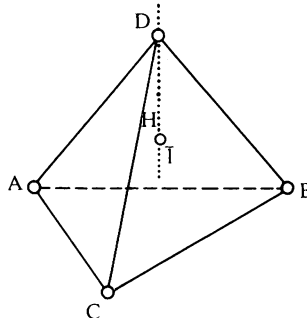


Fig. 6

Wenn später elementare Methoden der Darstellenden Geometrie zur Verfügung stehen, wird darüber gesprochen werden, daß alle denkbaren Fälle auch wirklich vorkommen. Hier sollten wir nun diskutieren, wie es mit der Voraussetzung an den Höhenfußpunkt

steht. Wir benutzen die bisherigen Bezeichnungen; zusätzlich vereinbaren wir: Sind  $X, Y$  verschiedene Punkte, so schreiben wir  $[XY]$  für ihre Verbindungsstrecke ( $XY$  ist die Verbindungsgerade). Dann können wir feststellen

*Genau dann, wenn  $H$  in der Geraden  $AB$  ( $BC$  oder  $AC$ ) liegt, ist  $\varphi_{AB}$  ( $\varphi_{BC}$ ,  $\varphi_{AC}$ ) ein rechter Winkel.*

*Genau dann, wenn  $H$  und  $C$  ( $A, B$ ) auf verschiedenen Seiten der Geraden  $AB$  ( $BC, AC$ ) liegen, ist  $\varphi_{AB}$  ( $\varphi_{BC}$ ,  $\varphi_{AC}$ ) ein stumpfer Winkel.*

Damit können wir begründen

**Satz 2:** Jede Seite eines Tetraeders bildet mit mindestens einer anderen Seite einen spitzen Winkel.

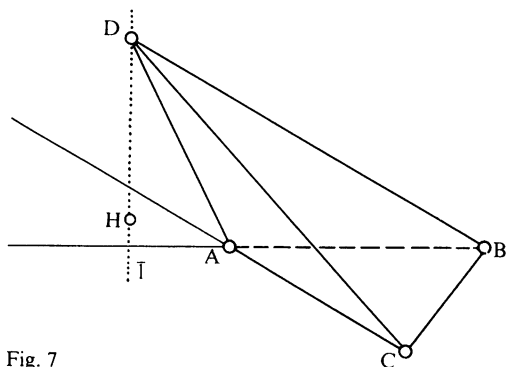


Fig. 7

**Beweis:** (Fig. 7) Seien  $\varphi_{AB}$  und  $\varphi_{AC}$  nicht spitz. Dann liegt  $H$  im Winkelfeld zu  $\alpha'$ , wobei  $\alpha'$  den Scheitelwinkel zu  $\alpha$  bezeichnet. Das Winkelfeld  $\alpha'$  hat mit der Geraden  $BC$  keinen Punkt gemein. Also liegt  $H$  sicher nicht auf  $BC$ , d. h.  $\varphi_{BC}$  ist kein rechter Winkel. Aber auch die Strecke  $[AH]$  hat mit der Geraden  $BC$  keinen Durchschnitt. Damit liegen die Punkte  $A$  und  $H$  auf der gleichen Seite der Geraden  $BC$ , d. h.  $\varphi_{ad}$  kann auch nicht stumpf sein.  $\square$

So haben wir geklärt, was verschiedene Lagen des Höhenfußpunktes für die Winkel bedeuten, die die zugehörige Seite mit den anderen Seiten bildet. In Bezug auf ein festes Grunddreieck  $ABC$  kann natürlich jeder Punkt der Grundebene Höhenfußpunkt sein. Nun ist aber bei einem Tetraeder an sich keine Seite als Grunddreieck ausgezeichnet. Es ist gerade im Hinblick auf Satz 2 von der Anschauung her nicht von vorneherein auszuschließen, daß man bei einem gegebenen Tetraeder doch immer eine Seite finden kann, die den zugehörigen Höhenfußpunkt im Innern enthält. Da es aber recht schwierig ist, sich alle Höhenfußpunkte eines Tetraeders gleichzeitig vorzustellen, machen wir einen kleinen Umweg. Im Unterricht wird man an dieser Stelle eine Reihe von Tetraedern konstruieren lassen, am besten ganz konkret aus den handelsüblichen Bausätzen. Theoretisch kann man in folgender Weise weiterkommen. Wir bemerken als Folgerung aus Satz 1 und 2

**Satz 3:** Genau dann, wenn ein Höhenfußpunkt im Innern der zugehörigen Seite liegt, gehört zu jedem Gegenwinkelpaar wenigstens ein spitzer Winkel.

*Beweis:* Die Gegenwinkelpaare sind die Paare  $(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$ ,  $(\varphi_{BC}, \varphi_{AD})$  und  $(\varphi_{AC}, \varphi_{BD})$ . Liegt ein Höhenfußpunkt im Innern der zugehörigen Seite, so können wir annehmen, daß etwa die Seite  $d$  mit jeder anderen Seite einen spitzen Winkel bildet, d. h.  $\varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{BC}$  und  $\varphi_{AC}$  sind spitz.

Zum Nachweis der Umkehrung können wir voraussetzen, daß etwa die Winkel  $\varphi_{AB}$  und  $\varphi_{AC}$  spitz sind. Ferner muß einer der Winkel  $\varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{BC}$  spitz sein. Ist der Winkel  $\varphi_{BC}$  spitz, so muß  $H$  nach den Vorüberlegungen zu Satz 2 im Innern des Dreiecks  $ABC$  liegen. Ist  $\varphi_{BC}$  nicht spitz, so ist außer dem Winkel  $\varphi_{AD}$  nach Satz 2 noch einer der Winkel  $\varphi_{BD}$ ,  $\varphi_{CD}$  spitz. Dann enthält aber wieder eines der Dreiecke  $ABD$  oder  $ACD$  den zugehörigen Höhenfußpunkt im Innern.  $\square$

Die „Umkehrung“, die zwar nicht schwierig, aber doch etwas mühselig zu beweisen ist, wird für die weiteren Überlegungen nicht benötigt. Sie ist hier nur aus ästhetischen Gründen angegeben und kann im Schulunterricht ohne weiteres weggelassen werden. Die andere Richtung benutzen wir, um Tetraeder anzugeben, bei denen kein Höhenfußpunkt im Innern der zugehörigen Seite liegt. Nach Satz 3 genügt es dazu, ein Tetraeder mit einem Gegenwinkelpaar aus nicht-spitzen Winkeln zu finden. Dazu beginnen wir mit einem „normalen“ Tetraeder wie in Figur 1.  $\bar{g}$  sei die Verbindungsgerade der Mittelpunkte  $E$ ,  $F$  der windschiefen Gegenkanten  $[AC]$  und  $[BD]$  (Fig. 8). Wir verschieben die Kante  $[BD]$  parallel, so daß sich ihr Mittelpunkt  $F$  auf  $\bar{g}$  bewegt.

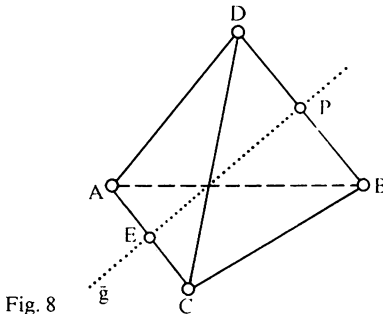


Fig. 8

Dann gilt offensichtlich für  $F \rightarrow E$

$$\varphi_{AC}, \varphi_{BD} \rightarrow 180^\circ.$$

Also haben wir

*Ist  $F$  nahe bei  $E$ , so sind die Gegenwinkel  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{BD}$  beide stumpf.*

Was ist in diesem Fall über die übrigen Winkel zu sagen? Mit Satz 2 kann man schließen, daß wenigstens zwei dieser Winkel spitz sein müssen. Wir wollen aber einmal annehmen,

daß noch einer dieser Winkel, sagen wir  $\varphi_{AB}$ , nicht spitz ist. Dann können wir Satz 2 auf die Dreiecke ABC und ABD anwenden und erhalten: Die Winkel  $\varphi_{BC}$  und  $\varphi_{AD}$  sind spitz. Damit bleibt der Winkel  $\varphi_{CD}$  zu untersuchen. Dazu sehen wir uns Figur 9 an. Sie zeigt, daß für  $D \rightarrow H$  gilt

$$\varphi_{BD} \rightarrow 0, \varphi_{CD} \rightarrow 0$$

Da wir für  $D \rightarrow \infty$  schon

$$\varphi_{BD} \rightarrow \beta, \varphi_{CD} \rightarrow \gamma$$

festgestellt haben, finden wir

$$0 < \varphi_{BD} < \beta, 0 < \varphi_{CD} < \gamma$$

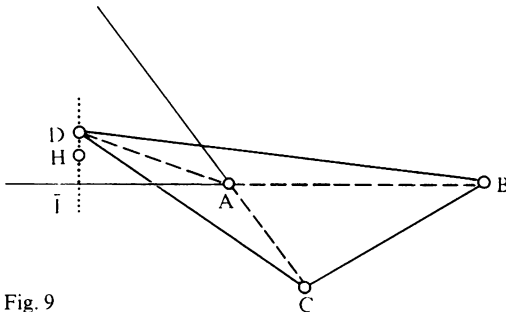


Fig. 9

Wir haben aber  $\varphi_{BD}$  als nicht spitzen Winkel vorausgesetzt; also ist  $\beta$  stumpf, damit ist  $\gamma$  spitz (Satz 0!) und folglich ist auch  $\varphi_{CD}$  spitz!

Diese Überlegung beweist

**Satz 4:** Unter den 6 Winkeln, die die Seiten eines Tetraeders miteinander bilden, sind mindestens 3 spitze Winkel.

Gäbe es nämlich nur zwei spitze Winkel, so gäbe es ein Gegenwinkelpaar aus nicht spitzen Winkeln. Für diese Situation haben wir aber eben gezeigt, daß höchstens ein weiterer Winkel nicht spitz ist.  $\square$

Soweit könnte man im Zusammenhang mit der elementaren Elementargeometrie in der Unterstufe kommen. Wenden wir uns nun dem nächsten Abschnitt zu.

## 2. Mittelstufe

Bei Volumenberechnungen und Schrägbildern spielt die dreiseitige Pyramide im Mittelstufenunterricht eine große Rolle. Dann kann man auch die Frage nach der Winkelverteilung wieder aufnehmen und unter synthetischen Gesichtspunkten ziemlich abschließend behandeln.

Die hübsche Antwort von M. Fiedler [1] wollen wir hier darstellen. Die grundlegende Idee besteht darin, jedem Tetraeder und jeder Winkelverteilung einen einfachen Graphen zuzuordnen. Ein *einfacher Graph* besteht aus einer Menge von *Ecken* – es genügt, sich darunter Punkte in der Ebene vorzustellen – und gewissen Verbindungsstrecken zwischen diesen Ecken, den sog. *Kanten*. Es ist also nicht jedes Eckenpaar durch eine Kante verbunden, man nennt den Graphen *zusammenhängend*, wenn je zwei Ecken durch einen (endlichen) *Kantenzug* verbunden sind (Fig. 10, 11). Bei der Darstellung in der Ebene sind Überschneidungen von Kanten erlaubt; man sollte jedoch darauf achten, daß keine Ecke im Innern einer Kante liegt (Fig. 12, 13).

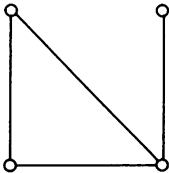


Fig. 10 (zusammenhängend)

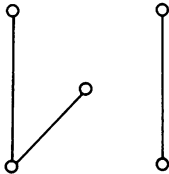


Fig. 11 (nicht zusammenhängend)

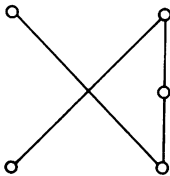


Fig. 12 (erlaubt)

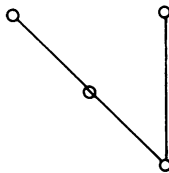


Fig. 13 (nicht erlaubt)

Ein Beispiel für einen einfachen Graphen bildet das 1-*Gerüst* eines Tetraeders, die Menge der Ecken und Kanten des Tetraeders, für die die zwei ebenen Darstellungen der Figuren 14, 15 gebräuchlich sind:

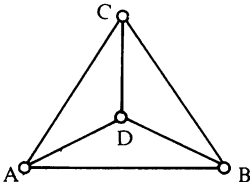


Fig. 14

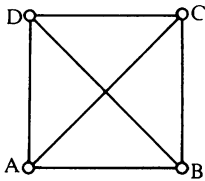


Fig. 15

Für unser Ziel ordnen wir jedem Tetraeder noch einen anderen Graphen zu: Wir nehmen 4 Ecken, von denen jede eine Seite des gegebenen Tetraeders repräsentieren soll, und

verbinden 2 Ecken genau dann durch eine Kante, wenn der von den zugehörigen Seiten gebildete Innenwinkel spitz ist. Ein einfacher Graph heiße *Winkelgraph*, wenn er in dieser Weise aus einem Tetraeder gewonnen werden kann.

Für die Winkelgraphen gibt es eine einfache Charakterisierung, die wir nun herausarbeiten wollen. Zunächst ist klar, daß sie genau 4 Ecken haben. Nach Satz 4 enthalten sie außerdem mindestens 3 Kanten. Graphen mit 4 Ecken und drei Kanten gibt es in 3 Typen:

- a) Eine Ecke ist mit allen andern durch eine Kante verbunden (Fig. 16)
- b) Die 3 Kanten bilden einen Streckenzug (Fig. 17)
- c) Die 3 Kanten bilden ein Dreieck ; dann gibt es aber eine Ecke, die zu keiner Kante gehört (Fig. 18).

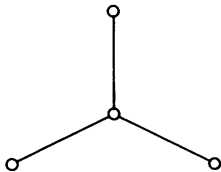


Fig. 16

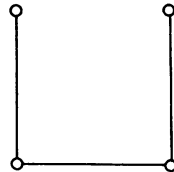


Fig. 17

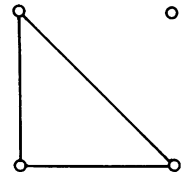


Fig. 18

Im Fall c) liegt wegen Satz 2 kein Winkelgraph vor. Dagegen handelt es sich bei den Graphen der Typen a und b tatsächlich um Winkelgraphen ; wir geben Beispiele für erzeugende Tetraeder an:

*Typ a:* Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit  $\gamma = 90^\circ$  und D ein von C verschiedener Punkt auf dem Lot zur Ebene  $\overline{ABC}$  durch den Punkt C. Dann gilt für das Tetraeder ABCD

$$\varphi_{AC} = \varphi_{BC} = \varphi_{CD} = 90^\circ,$$

also sind die Winkel  $\varphi_{ac}$ ,  $\varphi_{bc}$  und  $\varphi_{cd}$  spitz (Fig. 19).

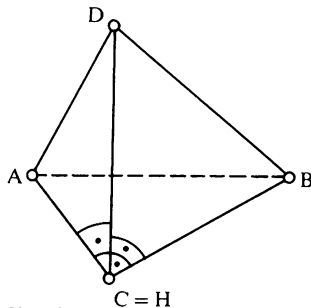


Fig. 19

Typ b: Sei  $ABC$  ein rechtwinkliges Dreieck mit  $\gamma = 90^\circ$  und  $D$  ein von  $B$  verschiedener Punkt auf dem Lot zur Ebene  $ABC$  durch den Punkt 3. Dann gilt für das Tetraeder  $ABCD$ :

$$\varphi_{AB} = \varphi_{BC} = \varphi_{CD} = 90^\circ,$$

also sind nach Satz 4 die Winkel  $\varphi_{ac}$ ,  $\varphi_{bc}$  und  $\varphi_{bd}$  spitz (Fig. 20).

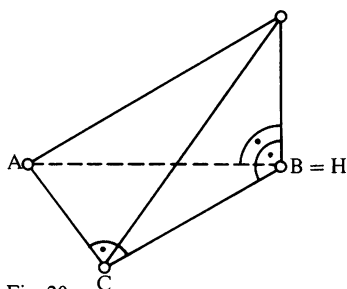


Fig. 20

Als nächstes überlegen wir, daß jeder einfache Graph mit vier Ecken und mehr als drei Kanten aus einem der Graphen a und b durch Hinzunahme von Kanten entsteht; es gibt ja dafür nur noch vier Typen (Fig. 21 bis 24).

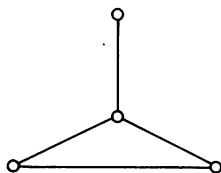


Fig. 21

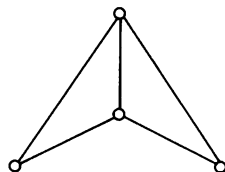


Fig. 22

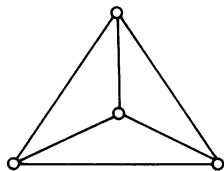


Fig. 23

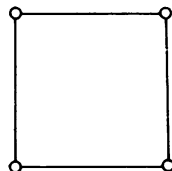


Fig. 24

Es ist auch für Schüler leicht möglich, diese Graphen als Winkelgraphen zu erkennen, vielleicht abgesehen von dem Graphen der Figur 22. Wir geben für jeden Typ ein erzeugendes Tetraeder an (Bezeichnungen wie früher):

*Figur 21:* Man bewege bei dem in Figur 19 dargestellten Tetraeder die Ecke B auf der Geraden AB ein kleines Stück auf die Ecke A zu.

*Figur 22:* Man betrachte das in Figur 5 dargestellte Tetraeder unter der Voraussetzung, daß das Grundreieck ABC spitzwinklig und die Spitze D genügend weit vom Höhenfußpunkt H entfernt ist.

*Figur 23:* Man betrachte das in Figur 2 dargestellte Tetraeder unter der gleichen Voraussetzung.

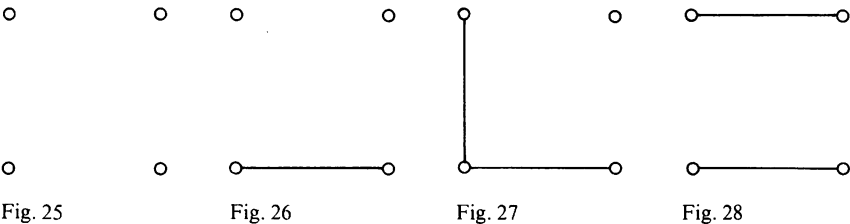
*Figur 24:* Wir beginnen mit einem Quadrat ABCD und verschieben die Diagonale [BD], so daß ihr Mittelpunkt F auf dem im Diagonalschnittpunkt E errichteten Lot  $\bar{g}$  wandert (Fig. 8). Die auftretenden Symmetrien liefern zunächst

$$\varphi_{AB} = \varphi_{AD} = \varphi_{BC} = \varphi_{CD}.$$

Aus Satz 4 folgt, daß bei 4 gleichen Innenwinkeln diese spitz sein müssen. Für  $F \rightarrow E$  hat man, wie schon bemerkt,

$$\varphi_{AC} = \varphi_{BD} \rightarrow 180^\circ.$$

Ist also F nahe genug bei E, so induziert das Tetraeder der ABCD den gewünschten Winkelgraphen.



Der Vollständigkeit halber führen wir uns nun noch die einfachen Graphen mit 4 Ecken und weniger als 3 Kanten vor. Davon gibt es nur die in den Figuren 25 bis 28 dargestellten Typen; sie sind ja alle keine Winkelgraphen. Jetzt vergleichen wir die Winkelgraphen (Fig. 16, 17, 21 bis 24) mit den andern einfachen Graphen, die genau vier Ecken enthalten (Fig. 18, 25 bis 28). Genaues Hinsehen führt auf den überraschenden

**Satz 5:** Ein einfacher Graph mit 4 Ecken ist genau dann ein Winkelgraph, wenn er zusammenhängend ist.

Damit haben wir die angekündigte Charakterisierung der Winkelgraphen erreicht und wir wissen, wie sich spitze Winkel am Tetraeder verteilen können. Offen ist noch, wie die nicht spitzen Winkel beim Tetraeder in rechte und stumpfe Winkel aufgeteilt werden können. Um das Ergebnis durchsichtig formulieren zu können, ist es günstig, den Begriff „Winkelverteilung“ zu präzisieren, obwohl dazu eine für die Schule ziemlich hohe Abstraktionsstufe erforderlich ist:



Eine *Winkelverteilung* (für Tetraeder) ist eine Vorschrift, die jedem der 6 Paare  $ab$ ,  $ac$ ,  $ad$ ,  $bc$ ,  $bd$  und  $cd$  eines der Prädikate „spitz“, „recht“ oder „stumpf“ zuordnet.

Es ist klar, wie ein Tetraeder mit den Ecken  $A, B, C, D$  und den Seiten  $a, b, c, d$  eine Winkelverteilung *induziert*. Umgekehrt sagen wir, daß eine gegebene Winkelverteilung *realisiert* werden kann, wenn es ein Tetraeder gibt, das sie induziert. Unser Problem lautet also: Welche Winkelverteilungen können realisiert werden? Um das Ergebnis vorwegzunehmen: Alle noch denkbaren Kombinationen sind möglich. Das sagt

**Satz 6:** Eine vorgegebene Winkelverteilung kann genau dann durch ein Tetraeder realisiert werden, wenn der zugeordnete Graph zusammenhängend ist.

Dabei ordnen wir einer Winkelverteilung in Analogie zu unserem Vorgehen bei einem Tetraeder den Graphen mit den Ecken  $a, b, c$  und  $d$  zu, in dem zwei Ecken genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn das zugehörige Prädikat „spitz“ ist.

Auf einen expliziten Beweis dafür, daß diese Bedingung auch hinreicht, wollen wir hier aus Umfangsgründen verzichten. Man stößt dabei auf die im Rahmen der synthetischen Geometrie so häufige Schwierigkeit, daß ein einheitlicher überzeugender Beweis nicht möglich ist, sondern viele Fallunterscheidungen getroffen werden müssen. Der Originalbeweis dieser Aussage von M. Fiedler setzt deswegen starke Methoden der analytischen Geometrie ein, die in der Schule, auch in der Kollegstufe nicht zur Verfügung stehen. Dies heißt nicht, daß man den Satz in der Mittelstufe nicht beweisen kann; das ist nur eine Frage der für dieses Thema zur Verfügung stehenden Zeit. Denn andererseits ermöglichen die vielen zu untersuchenden Fälle nach Anregung durch den Lehrer eigene Aktivitäten der Schüler: Es geht ja nur darum, die zur Erzeugung der Winkelgraphen angegebenen Modelle von Tetraedern so abzuändern, daß beliebig vorgeschriebene Innenwinkel von stumpfen in rechte verwandelt werden und umgekehrt. Das sind etwa 13 mehr oder weniger schwierige Konstruktionsaufgaben, die unter Zuhilfenahme von Elementen der Darstellenden Geometrie natürlich zu bewältigen sind. Wir geben dazu noch einen unmittelbar einsichtigen Hilfssatz an, der für alle diese Konstruktionen sehr nützlich ist:

**Hilfssatz:**  $ABCD$  sei ein Tetraeder,  $B'$  sei ein von  $B$  verschiedener Punkt der Geraden  $AB$  nahe bei  $B$ . Dann gilt für die Innenwinkel des Tetraeders  $A'B'C'D'$  mit  $A' = A$ ,  $C' = C$ ,  $D' = D$  (Fig. 29).

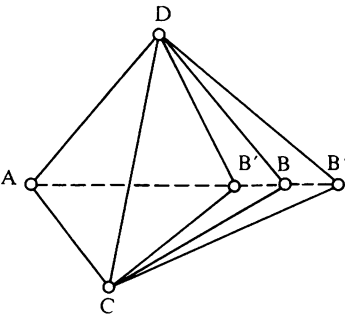


Fig. 29

- 1)  $\varphi_{A'B'} = \varphi_{AB}$ ,  $\varphi_{A'C'} = \varphi_{AC}$ ,  $\varphi_{A'D'} = \varphi_{AD}$
- 2)  $\varphi_{C'D'} < \varphi_{CD}$ , falls  $B'$  zwischen A und B,  $\varphi_{C'D'} > \varphi_{CD}$  sonst
- 3)  $\varphi_{B'C'}$  ( $\varphi_{B'D'}$ ) spitz oder stumpf, falls  $\varphi_{BC}$  ( $\varphi_{BD}$ ) spitz oder stumpf.  $\square$

Die Anwendung dieses Hilfssatzes können wir hier nur an einem Beispiel erläutern. Wir stellen uns die Aufgabe, das zur Realisierung des in Figur 21 dargestellten Graphen benutzte Tetraeder so abzuändern, daß die Winkel  $\varphi_{AC}$  und  $\varphi_{BC}$  stumpf werden. Dazu bewegen wir zuerst D auf der Geraden AD etwas von A weg. Damit wird nach dem Hilfssatz der Winkel  $\varphi_{BC}$  stumpf, während bei allen anderen Winkeln der Typ erhalten bleibt. Bewegen wir nun noch das neue D auf der neuen Geraden BD von B weg, so sind wir am Ziel. Zwischendurch haben wir dabei sogar noch eine weitere Winkelverteilung erzeugt, so daß nun für den in Figur 19 dargestellten Winkelgraphen alle denkbaren Fälle von rechten und stumpfen Winkeln als möglich erkannt sind.

Wir schließen mit einer Bemerkung zum Winkelsummensatz. Wie schon erwähnt (s. Fußnote 1 auf S. 278) läßt er sich nicht unmittelbar auf das Tetraeder übertragen. M. Fiedler beweist in seiner Arbeit, daß jedoch folgende Verallgemeinerung gilt

**Satz 7:** Durch 5 Innenwinkel ist der 6. Innenwinkel eindeutig bestimmt ([1] Satz 7).

Es wäre interessant zu untersuchen, ob auch dieser Satz für den Schulunterricht zugänglich gemacht werden kann. Dazu begnügen wir uns mit einer Andeutung, für die die Grundlagen in der Kollegstufe vorhanden sind. Wir projizieren das Tetraeder der Figur 2 orthogonal auf die Grundebene (Fig. 30). Daraus erkennen wir die Gleichung

$$d = a \cos \varphi_{ad} + b \cos \varphi_{bd} + c \cos \varphi_{cd},$$

das heißt

$$a \cos \varphi_{ad} + b \cos \varphi_{bd} + c \cos \varphi_{cd} + d \cos \varphi_{dd} = 0,$$

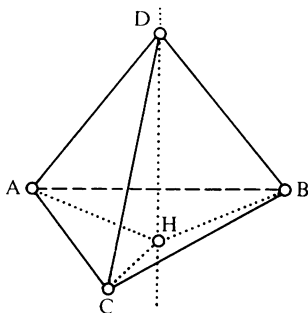


Fig. 30

wobei  $\varphi_{dd} = 180^\circ$  gesetzt ist; entsprechende Gleichungen erhalten wir bei Projektion auf die anderen Seitenebenen des Tetraeders (mit  $\varphi_{aa} = \varphi_{bb} = \varphi_{cc} = 180^\circ$ ). Wir können damit feststellen, daß das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{array}{cccc} -1 & \cos \varphi_{ab} & \cos \varphi_{ac} & \cos \varphi_{ad} \\ \cos \varphi_{ab} & -1 & \cos \varphi_{bc} & \cos \varphi_{bd} \\ \cos \varphi_{ac} & \cos \varphi_{bc} & -1 & \cos \varphi_{cd} \\ \cos \varphi_{ad} & \cos \varphi_{bd} & \cos \varphi_{cd} & -1 \end{array}$$

eine nicht triviale Lösung hat, woraus gewisse Bedingungen an die Koeffizienten folgen. (Der Lehrer weiß, daß die Determinante dieser Matrix verschwinden muß; nimmt man alle Winkel außer  $\varphi_{ab}$  als gegeben an, so erhält man aus dieser Bedingung eine quadratische Gleichung für  $\cos \varphi_{ab}$ , die höchstens zwei Lösungen hat).

#### Literatur

[1] Fiedler, M.: Geometrie simplexu v  $E_n$  (první část). In: Časopis Pěst. Mat. 79 (1954), S. 297–320.

Anschrift des Verfassers: Professor Dr. Rudolf Fritsch, Friedemann-Bach-Str. 61, 8032 Gräfelfing

Eingangsdatum: 10. 3. 1981